תרגול 5 בפיסיקה ב' לביולוגים

אנרגיה חשמלית- האנרגיה החשמלית היא כמות האנרגיה הפוטנציאלית הקיימת בין מטענים שונים. האנרגיה החשמלית היא למעשה כמות העבודה המושקעת בהעברת מערכת מטענים ממצב אחד למצב שני. עבודה גם מוגדרת לפי[1] $W = \vec{F}\cdot\vec{x} = \left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{x}\right|\cos\theta$ כלומר העבודה היא המכפלה הסקלרית בין כוח לבין ההעתק של הגוף. כמו כל אנרגיה פוטנציאלית האנרגיה יכולה להפוך לאנרגיה קינטית. **אנרגיה היא גודל סקלרי ולא וקטורי**. אנרגיה חיובית היא אנרגיה שיש להשקיע ואילו אנרגיה שלילית היא אנרגיה ש"מקבלים" מהמערכת

פוטנציאל חשמלי-הפוטנציאל החשמלי הוא למעשה כמות העבודה שמתבצעת ליחידת מטען. היחידה בה נמדד הפוטנציאל היא וולט [V]. הפוטנציאל החשמלי תמיד מוגדר בין 2 נקודות כלומר מה שניתן למדוד הוא הפרש הפוטנציאלים בין 2 נקודות לכן נהוג להגדיר נקודה כלשהו כבעלת פוטנציאל 0 וביחס אליה מגדירים את הפוטנציאל בכל המרחב. נהוג להגדיר את הפוטנציאל ב- $r=\infty$ כ-0 כלומר $V(\infty)=0$.
הפוטנציאל בנקודה מסויימת הוא 1V אם דרושה עבודה של 1J בהבאת מטען של 1C מאיסוף לנקודה.
הביטוי לפוטנציאל הוא $\Delta V = \frac{W}{Q} = \frac{\vec{F}}{Q}\cdot\vec{x} = -\vec{E}\cdot\vec{x} = -\left|\vec{E}\right|\cdot\left|\vec{x}\right|\cos\theta$ מכאן ניתן לראות כי כיוון השדה החשמלי הוא מפוטנציאל גבוהה לפוטנצאיל נמוך ולכן נובע כי מטען חשמלי חיובי ינוע מפוטנציאל גבוהה לפוטנציאל נמוך (בכיוון השדה החשמלי) ובאותו אופן מטען שלילי ינוע מפוטנציאל נמוך לפוטנציאל גבוהה (בכיוון הפוך לכיוון השדה החשמלי).
העבודה הנעשית מהעברת מטען q מנקודה בעלת פוטנציאל V_1 לנקודה בעלת פוטנציאל V_2 היא $W_{12} = \Delta V\cdot q = (V_2 - V_1)q$ להפרש הפוטנציאלים בין 2 נקודות קוראים מתח (נהוג לסמן ב-U) וגם הוא נמדד בוולטים. הפוטנציאל הוא גודל רציף. הפוטנציאל בנקודה מסויימת הוא סכום הפוטנציאלים שיוצרים כל הגופים בבעיה באותה הנקודה.

נוסחאות:

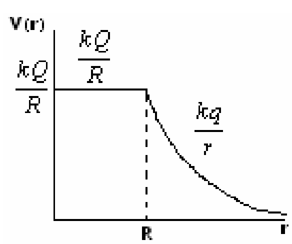
פוטנציאל של מטען נקודתי q במרחק r ממנו- $V(r) = \frac{kq}{r}$

האנרגיה הפוטנציאלית החשמלית בין 2 מטענים q ו-Q המרוחקים מרחק r אחד מהשני-

$$E_p = \frac{kqQ}{r}$$

האנרגיה הפוטנציאלית של מערכת מטענים- $E_p = \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i}\frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$ סוכמים על האנרגיה הפוטנציאלית של כל זוג מטענים במערכת ומחלקים בחצי כי $\frac{kq_iq_j}{r_{ij}} = \frac{kq_jq_i}{r_{ji}}$ ולמעשה סכמנו על כל זוג מטענים פעמיים.

פוטנציאל של כדור מוליך ברדיוס R הטעון במטען Q[2]- מאחר והפוטנציאל מוגדר לפי השדה אזי מחוץ לכדור הפוטנציאל הוא כמו פוטנציאל של מטען Q נקודתי (ראינו בתרגול שעבר כי השדה מחוץ לכדור טעון זהה לשדה של מטען נקודתי הזהה בגודלו למטען שעל הכדור שנמצא במרכז הכדור). בתוך הכדור אין שדה ואם אין שדה אין **שינוי** בפוטנציאל ולכן הפוטנציאל בתוך הכדור לא מתאפס אלא שווה לפוטנציאל שעל פני הכדור $V(r\le R) = \frac{kQ}{R}$. באופן גרפי הפוטנציאל הוא:

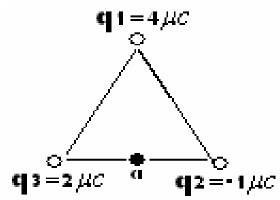


r הוא המרחק ממרכז הכדור.

---

[1] אם הכוח משתנה לאורך המסלול יש צורך לבצע אנטגרל (או סכום).
[2] זהו גם הפוטנציאל של קליפה כדורית (מוליכה או לא מוליכה הטעונה במטען Q באופן אחיד.

1) בשלושת קודקודי משולש שווה צלעות בעל צלע של 20cm נמצאים 3 מטענים שונים כפי שמתואר באיור



א. מהי האנרגיה הפוטנציאלית של המערכת?

ב. מהי העבודה הדרושה בהבאת המטען q_1 לנקודה a הנמצאת במרחק שווה משני המטענים האחרים? מהי האנרגיה של המערכת כעת?

<u>פתרון:</u>

א. נחשב את האנרגיה הפוטנציאלית ב-2 דרכים שונות:

i. בניית המערכת על ידי הבאת המטענים מאינסוף- הבאת המטען הראשון אינה דורשת עבודה מאחר והפוטנציאל בכל המרחב הוא 0 ולכן גם הפרש הפוטנציאלים יהיה 0 ולכן למקם את q_1 לא תדרוש עבודה ולכן $W_1=0$. הבאת המטען השני מאינסוף (שם הפוטנציאל הוא 0) למרחק של 20cm מ-q_1 שם הפוטנציאל הוא $\frac{kq_1}{r_{12}}=\frac{9\cdot10^9\cdot4\cdot10^{-6}}{0.2}=\frac{36\cdot10^4}{2}=18\cdot10^4$ ולכן העבודה הנעשית היא $W_2=\Delta V\cdot q_2=(V_2-V_1)q_2=(18\cdot10^4-0)\cdot-1\cdot10^{-6}=-0.18J$ (למעשה מאחר והעבודה כאן שלילית קיבלנו עבודה מהמערכת). המטען השלישי מובא למרחק 20cm של מ-2 המטענים שכבר קיימים ושם הוא ירגיש פוטנציאל שהוא סכום של 2 הפוטנציאלים של 2 המטענים:

$$\frac{kq_1}{r_{13}}+\frac{kq_2}{r_{23}}=\frac{9\cdot10^9\cdot4\cdot10^{-6}}{0.2}+\frac{9\cdot10^9\cdot(-1)\cdot10^{-6}}{0.2}=\frac{27\cdot10^4}{2}=13.5\cdot10^4$$

ולכן העבודה היא:

$$W_3=\Delta V\cdot q_2=(V_2-V_1)q_2=(13.5\cdot10^4-0)\cdot2\cdot10^{-6}=0.27J.$$

האנרגיה של המערכת היא סך כל העבודה שהושקעה בבנייתה שהיא:

$$E=W_1+W_2+W_3=0+\frac{kq_1q_2}{r_{12}}+\frac{kq_1q_3}{r_{13}}+\frac{kq_2q_3}{r_{23}}=-0.18+0.27=0.09[J]$$

ii. נשתמש ישירות בנוסחא $E_p=\frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i}\frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$ ונקבל:

$$E_p=\frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i}\frac{kq_iq_j}{r_{ij}}=\frac{1}{2}[\frac{kq_1q_2}{r_{12}}+\frac{kq_1q_3}{r_{13}}+\frac{kq_2q_1}{r_{21}}+\frac{kq_2q_3}{r_{23}}+\frac{kq_3q_1}{r_{31}}+\frac{kq_3q_2}{r_{32}}]$$
$$=-0.18+0.27=0.09[J]$$

ואכן קיבלנו את אותה התוצאה.

ב. הפוטנציאל בנקודה a הוא:

$$V_a=\frac{kq_1}{r_{1a}}+\frac{kq_2}{r_{2a}}=\frac{k}{r_{1a}}(2\cdot10^{-6}-1\cdot10^{-6})=\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-6}}{0.1}=9\cdot10^4[V]$$

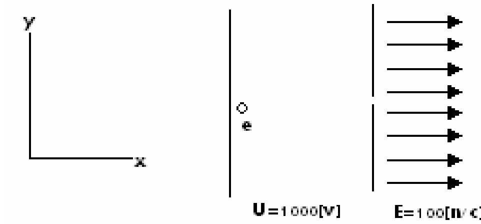
העבודה בהעברת המטען q_1 ל-a היא:

$$W=(V_a-V_1)q_1=(9\cdot10^4-4.5\cdot10^4)\cdot4\cdot10^{-6}=18\cdot10^{-2}=0.18[J]$$

זוהי גם האנרגיה שנוספה למערכת ולכן האנרגיה של המערכת כעת היא האנרגיה שחושבה בסעיף א' ועוד העבודה שעשינו ולכן E=0.09+0.18=0.27 [J].

2) נתונים 2 לוחות אינסופיים הטעונים בצפיפות מטען אחידה זהה אך שונה סימנה כך שהפרש הפוטנציאלים (המתח) בינהם הוא $U=\Delta V=1000[V]$ ומרחקם אחד מהשני הוא 1 מ"מ.

אלקטרון משוחרר במנוחה מהלוח השמאלי ומאיץ לכיוון הלוח הימני שם הוא יוצא דרך סדק דק לאיזור בו השדה החשמלי הוא $100[\frac{N}{C}]$ בכיוון תנועתו של האלקטרון.



א. מהו כיוון השדה החשמלי? מי מהלוחות טעון חיובית ומי טעון שלילית? מי מהלוחות נמצא בפוטנציאל גבוהה יותר? מהי עוצמת השדה בין הלוחות? מהי צפיפות המטען בין הלוחות?

ב. מה תהיה מהירות האלקטרון ברגע שיגיע לסדק?

ג. לאחר איזה מרחק מחוץ ללוחות יעצר האלקטרון?

ד. מהו הפרש הפוטנציאלים בין הנקודה בה עצר לבין הלוח הימני?

פתרון:

א. לאלקטרון מטען שלילי ולכן הכוח הפועל עליו הוא בכיוון הפוך לכיוון קווי השדה ומאחר ונתון כי האלקטרון נע ימינה אזי ברור כי קווי השדה הם לכיוון שמאל כלומר לכיוון השלילי של ציר X. קווי השדה יוצאים מהלוח החיובי ונכנסים ללוח השלילי לכן הלוח הימני טעון חיובית והלוח השמאלי טעון שלילית. כיוון השדה החשמלי הוא בכיוון בוא קטן הפוטנציאל ולכן ללוח הימני יהיה פוטנציאל גבוהה יותר מללוח השמאלי. מאחר והשדה קבוע בין הלוחות נקבל כי בין לוחות אינסופיים $\left|\vec{E}\right| = \frac{U}{d}$ כאשר U הוא המתח בין הלוחות ואילו d הוא המרחק בין הלוחות -> במקרה שלנו $E = \frac{U}{d} = \frac{1000}{0.01} = 10^5\left[\frac{N}{C}\right]$. צפיפות המטען תחושב פר לוח לפי הנוסחא עבור השדה בין 2 לוחות טעונים ונקבל $\sigma = \frac{E}{4\pi k} = \frac{10^5}{4\pi k}$.

ב. כשהאלקטרון מגיע לסדק כל האנרגיה הפוטנציאלית החשמלית מומרת לאנרגיה קינטית כלומר הפרש הפוטנציאלים בו נע האלקטרון הוא [V] 1000- ולכן הארנגיה הפוטנציאלית שהומרה היא- $E = \Delta V \cdot q = \Delta V \cdot e = -1000 \cdot -1.67 \cdot 10^{-19} = 1.67 \cdot 10^{-16}$ זוהי האנרגיה שהומרה לאנרגיה קינטית ולפי חוק שימור האנרגיה נקבל:

$$E_k - E_p = 0 \Rightarrow E_k = E_p \Rightarrow \frac{1}{2}m_e v^2 = 1.67 \cdot 10^{-16} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-19}}{9.1 \cdot 10^{-31}}} = \sqrt{0.367 \cdot 10^{12}} = 6.06 \cdot 10^5 \Rightarrow \vec{v} = 6.06 \cdot 10^5\,\hat{x}$$

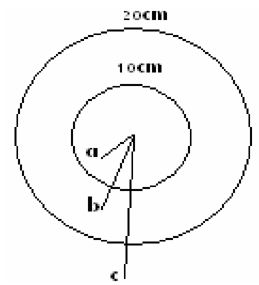
ג. ברור האלקטרון יעצר מאחר וכיוון השדה הוא כיוון תנועתו של האלקטרון ולכן הכוח שיפעל עליו יהיה בכיוון הפוך לתנועתו והאלקטרון ירגיש תאוטה מחוץ ללוחות. האלקטרון יעצר כאשר כל האנרגיה הקינטית שו תהפוך שוב להיות אנרגיה פוטנציאלית (במקרה זה האנרגיה הפוטנציאלית היא אנרגיה חשמלית). סך כל האנרגיה הקינטית של האלקטרון שווה $E_k = \frac{1}{2}m_e v^2 = 1.67 \cdot 10^{-16}$ האנרגיה הפוטנציאלית שהאלקטרון צובר על חשבון האנרגיה הקינטית היא x $E_p = |q|\vec{E} \cdot \vec{x} = |e|Ex = 1.67 \cdot 10^{-19} \cdot 100x = 1.67 \cdot 10^{-17}x$ האנרגיה הפוטנציאלית הסופית שווה לכל האנרגיה הקינטית ההתחלתית ולכן

$$E_p = 1.67 \cdot 10^{-17}x = 1.67 \cdot 10^{-16} \Rightarrow x = 10[m]$$

ד. ברור שהפרש הפוטנציאלים יהיה $1000[V]$ (כאשר הלוח השמאלי הוא בעל פוטנציאל גבוהה ייותר מנקודת העצירה) – נראה זאת בחישוב:

נשתמש בנוסחא $\Delta V = V_{\text{הנקודה}} - V_{\text{לוח}} = -\vec{E}\cdot\vec{x} = -Ex = -100\cdot 10 = -1000[V]$ ואכן קיבלנו כי הפרש הפוטנציאלים (המתח) בין הלוח לנקודה הוא 1000 וכי הנקודה נמצאית בפוטנציאל נמוך יותר מהלוח.

3) נתונה מעטפת כדורית מוליכה שרדיוסה $R_1 = 10cm$ טעונה בצפיפות מטען של $\sigma_1 = 2\cdot 10^{-12}\left[\frac{C}{m^2}\right]$ ומסביבה מעטפת מוליכה נוספת שרדיוסה $R_2 = 20cm$ הטעונה בצפיפות מטען $\sigma_2 = -4\cdot 10^{-12}\left[\frac{C}{m^2}\right]$ מהו הפוטנציאל בנקודות :



i. $R_a = 5cm$

ii. $R_b = 15cm$

iii. $R_c = 25cm$

<u>פתרון:</u>

ראשית נחשב את המטען של כל כדור:

$$Q_1 = \sigma_1 \cdot 4\pi R_1^2 = 2\cdot 10^{-12}\cdot 4\pi\cdot(0.1)^2 = 8\pi\cdot 10^{-14} = 0.25\cdot 10^{-12}$$

$$Q_2 = \sigma_2 \cdot 4\pi R_2^2 = -4\cdot 10^{-12}\cdot 4\pi\cdot(0.2)^2 = -64\pi\cdot 10^{-14} = -2\cdot 10^{-12}$$

i. הנקודה a נמצאת בתוך שני הכדורים. בתוך כדור טעון הפוטנציאל שווה לפוטנציאל שעל שפת הכדור לכן הפוטנציאל בנקודה a יהיה סכום הפוטנציאלים של ההכדורים של שפת הכדורים כלומר:

$$V_a = \frac{kQ_1}{R_1} + \frac{kQ_2}{R_2} = \frac{k\cdot 0.25\cdot 10^{-12}}{0.1} - \frac{k\cdot -2\cdot 10^{-12}}{0.2} = 9\cdot 10^9\cdot 2.5\cdot 10^{-12} - 9\cdot 10^9\cdot 10^{-11}$$
$$= 2.25\cdot 10^{-2} - 9\cdot 10^{-2} = -6.75\cdot 10^{-2}[V]$$

ii. הנקודה b נמצאת מחוץ לכדור הפנימי אך בתוך הכדור החיצוני לכן הפוטנציאל של הכדור הפנימי יהיה כמו פוטנציאל של מטען נקודתי ביחס לנקודה ואילו הפוטנציאל של הכדור החיצוני בנקודה זו עדיין יהיה הפוטנציאל על שפת הכדור כלומר:

$$V_b = \frac{kQ_1}{R_b} + \frac{kQ_2}{R_2} = \frac{k\cdot 0.25\cdot 10^{-12}}{0.15} - \frac{k\cdot -2\cdot 10^{-12}}{0.2} = 9\cdot 10^9\cdot 1.67\cdot 10^{-12} - 9\cdot 10^9\cdot 10^{-11}$$
$$= 1.5\cdot 10^{-2} - 9\cdot 10^{-2} = -7.5\cdot 10^{-2}[V]$$

iii. הנקודה c נמצאת מחוץ לשני הכדורים ולכן הפוטנציאל שכל כדור יוצר בנקודה יהיה כמו פוטנציאל של מטען נקודתי המרוכז במרכזי הכדורים כלומר:

$$V_c = \frac{kQ_1}{R_c} + \frac{kQ_2}{R_c} = \frac{k\cdot 0.25\cdot 10^{-12}}{0.25} - \frac{k\cdot -2\cdot 10^{-12}}{0.25} = 9\cdot 10^9\cdot 1\cdot 10^{-12} - 9\cdot 10^9\cdot 8\cdot 10^{-11}$$
$$= 9\cdot 10^{-3} - 72\cdot 10^{-3} = -6.3\cdot 10^{-2}[V]$$